RESUMEN PRUEBA TRANSICIÓN (Ex PSU)

(Para estudiar en tiempos de cuarentena)

@matematicaen30minutos

Hola, espero que estén muy bien… :)

Como ya saben la situación a nivel goblal se está complicando por el coronavirus, por lo que es fundamental que juntos podamos combatir esta pandemia y quedarnos en casa para poder cuidar tanto de nostros, como de nuestros seres queridos.

Por lo mismo hemos decidido crear un resumen gratuito con la toda materia de la prueba de transición junto a códidos QR que te llevarán a videos de ciertas materias que iremos subiendo durante el año para la prueba de transición.

¿Cómo utilizarlo?

Te recomiendo imprimirlo o usarlo desde el computador, ya que así con tu celular lo podrás escanear más fácilmente :) De todas formas este texto se estará actualizando a medida que vayamos subiendo más contenido a YouTube (idealmente cada 15 días) para brindarte cada vez un mejor aprendizaje.

¿Cómo escanear los códigos QR?

Dependerá del sistema operativo de tu celular. Si es:

- iOS: solo debes abrir la cámara, apuntar al código QR y podrás ver el video del ejercicio ☺
- Android: tienes que ir a Google Play, descargar una aplicación que lea códigos QR (hay muchas, por ejemplo, "QR Code Reader" y podrás ver el vídeo del ejercicio ☺

¡Probemos!

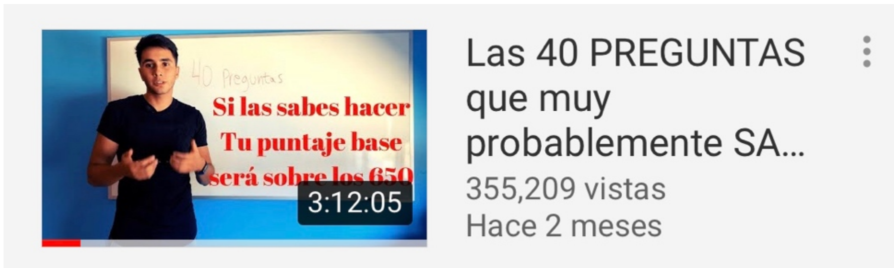
Si pudiste ingresar, ¡suscríbete al canal!
🎥❤️

¡Ahora sí vamos con todo para este año lograr tu meta!

Si en el PDF encuentras algún error de formato o crees hay un error, envíanos un mensaje para solucionarlo inmediatamente. Esto lo hacemos entre todos :)

Videos que no te puedes perder…

"Las 40 PREGUNTAS que muy probablemente SALDRÁN EN la PSU explicadas [ACTUALIZACIÓN 2020]"



"Las otras 40 PREGUNTAS que muy probablemente SALDRÁN EN la PSU explicadas (Parte 2) [ACTUALIZACIÓN 2020] "

" ¿Cómo será la "PSU" este 2020?"

RESUMEN PRUEBA TRANSICIÓN

Eje temático: números

@matematicaen30minutos

Conjuntos numéricos

Nombre	Símbolo	Definición	Ejemplos
Naturales	$\mathbb{N}$	Son aquellos que permiten contar elementos de cierto conjunto.	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10…
Enteros	$\mathbb{Z}$	Contiene a los números naturales, al cero y a los inversos aditivos de los números naturales.	…-3,-2,-1,0,1,2,3..
Racionales	$\mathbb{Q}$	Todo número que se pueda escribir como fracción.	$-\frac{1}{2}; 4; -\frac{4}{5}; \frac{1}{2}; 0,\overline{3}$
Irracionales	$\mathbb{Q}^*$	Todo número que no se pueda escribir como fracción, estos numeros tienen infinitos decimales que se repiten en forma no periodica.	$\sqrt{3}, \pi, \sqrt[3]{89}, \log_9 7, \sqrt[7]{5}$
Reales	$\mathbb{R}$	Este conjunto contiene a los números racionales y a los irracionales	Todos, los números anteriormente mencionados
Números complejos	$\mathbb{C}$	Además de contener al conjunto de los números reales, contiene a los números imaginarios (raíces con índice par y cantidad subradical negativa)	5i,3i, 3+6i

Números primos

Son aquellos enteros positivos que son divisibles por uno y por sí mismos, es decir, tienen sólo dos divisores y diferentes. Por ejemplo: 2,3,5,7,11,13,17,19...

Números compuestos

Son aquellos enteros positivos que tienen más de dos divisores. Por ejemplo: 4,6,8,9,10,12.

Inverso aditivo (opuesto)

Si tenemos un número n, nuestro inverso aditivo (opuesto) será el número que al sumarlo con n nos de cero, es decir, el opuesto de n es $-\mathrm{n}$. Por ejemplo, el inverso aditivo de 2 es -2.

Inverso multiplicativo (recíproco)

Si tenemos un número n distinto de cero, nuestro inverso multiplicativo será el número tal que al multiplicarlo por n nos dé como resultado 1. Es decir:

$$\mathrm{n} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}} = 1$$

Por ejemplo, el inverso mutiplicativo de 2 es $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

Fracción

$$\frac{\textbf{NUMERADOR}}{\textbf{DENOMINADOR}}$$

Recuerda que el denominador de una fracción no puede ser cero.

Operaciones con fracciones

Suma y resta

Para sumar o restar fracciones estas tienen que tener el mismo denominador.

Si el denominador es igual, solo operamos los numeradores y mantenemos el denominador.

¡Veamos un ejemplo!

$$\frac{1}{2}+\frac{6}{2}=\frac{1+6}{2}=\frac{7}{2}$$

En caso que los denominadores sean distintos, podemos realizar el siguiente proceso:

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$$

¡Veamos un ejemplo!

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2\cdot 6-3\cdot 1}{3\cdot 6}=\frac{12-3}{18}=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}$$

Multiplicación

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Por ejemplo:

$$\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2\cdot 3}{7\cdot 5}=\frac{6}{35}$$

División

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

Aprende cómo comparar fracciones

¡Veamos un ejemplo!

$$\frac{3}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5} = \frac{21}{20}$$

Números decimales

Decimal finito

Tiene una cantidad finita de cifras decimales.

Por ejemplo, $0{,}25; 0{,}5; \ -3{,}454; 2{,}12$, etc.

Para transformar un decimal finito a fracción debemos escribir el número completo, sin considerar la coma, en el númerador y en el denominador una potencia de 10 elevada a la cantidad de decimales que tenga el número, o en otras palabras, un 1 y luego un cero por cada cifra decimal que haya.

¡Veamos un ejemplo!

$$0{,}25 = \frac{25}{10^2} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Decimal semiperiódico

Tiene uno o más números decimales antes del periodo. Por ejemplo: $0{,}4\overline{5}$, notemos que el periodo significa que ese número se va repitiendo infinitamente, en el ejemplo anterior$0{,}4\overline{5} = 0{,}45555555555555\ldots$

Para transformar un número decimal semiperiódico a fracción, debemos escribir en el numerador el número completo sin considerar la coma ni el periodo, y le restamos el número que se forma con las cifras que están fuera del periodo, mientras que en el denominador colocamos un 9 por cada cifra periódica y un 0 por cada cifra decimal fuera del periodo.

¡Veamos un ejemplo!

$$0{,}4\overline{5} = \frac{45-4}{90} = \frac{41}{90}$$

Decimal periódico

Tiene una cantidad infinita de números decimales que se repiten de forma periódica, por ejemplo, $1,\overline{5}, 4,\overline{67}, 0,\overline{54}$. etc.

Para transformar un número decimal periodico a fracción, debemos escribir en el numerador el número completo sin considerar la coma ni el periodo, y le restamos el número que se forma con las cifras que están fuera del periodo, mientras que en el denominador colocamos un **nueve** por cada cifra periodica que haya.

Ve como hacer este procedimiento paso a paso

¡Veamos un ejemplo!

$$1,\overline{5} = \frac{15-1}{9} = \frac{14}{9}$$

Posiciones y estructura de un número decimal

...	,			...
UNIDAD	DÉCIMA	CENTÉSIMA	MILÉSIMA	DIEZMILÉSIMA

Aproximaciones de números decimales

Truncarmiento: seleccionamos la posición decimal y el número llega hasta ahí, en otras palabras, eliminamos todas las cifras que vengan después de la posición pedida.

Redondeo: seleccionamos la posición decimal y vemos la cifra posterior a ella, si esta es mayor o igual a 5 la cifra de la posición seleccionada aumenta en 1, en caso contrario la cifra queda igual.

Aproximación por defecto: buscamos un número con una cierta cantidad de cifras, según la posición decimal que nos pidan, que sea inmediatamente menor a el número original.

Aproximación por exceso: buscamos un número con una cierta cantidad de cifras, según la posición decimal que nos pidan, que sea inmediatamente mayor a el número original.

¡Veamos unos ejemplos!

Número	Truncamiento a la décima	Redondeo a la décima	Aproximación por defecto a la décima	Aproximación por exceso a la décima
2,56	2,5	2,6	2,5	2,6

Número	Truncamiento a la décima	Redondeo a la décima	Aproximación por defecto a la décima	Aproximación por exceso a la décima
1,24	1,2	1,2	1,2	1,3

Número mixto

Tiene una parte entera P y una parte decimal $\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{d}}$

$$\mathrm{P}\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{d}} = \mathrm{P} + \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{d}} = \frac{\mathrm{Pd} + \mathrm{n}}{\mathrm{d}}$$

¡Veamos unos ejemplos!

$$5\frac{1}{4} = 5 + \frac{1}{4} = \frac{5 \cdot 4 + 1}{4} = \frac{21}{4}$$

$$-5\frac{1}{4} = -\left(5 + \frac{1}{4}\right) = -\left(\frac{5 \cdot 4 + 1}{4}\right) = -\frac{21}{4}$$

Notemos que el – corresponde al número mixto completo, por lo que sería un **error** realizar el siguiente procedimiento:

$$-5\frac{1}{4} = -5 + \frac{1}{4} = \frac{-5 \cdot 4 + 1}{4} = -\frac{19}{4}$$

Porcentajes

Recuerda…

$$\% = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}}$$

Porcentaje	Fracción	Decimal
5%	$\frac{5}{100}$	0,05
36%	$\frac{36}{100}$	0,36
100%	$\frac{100}{100}$	1,00

¿Cómo calcular el porcentaje de un número?

Simplemente multiplicamos el porcentaje por el número

¡Veamos un ejemplo!

El 40% de 50:

$$\frac{40}{100} \cdot 50 = \frac{200}{100} = 20$$

Clase de porcentajes prueba de transición

Proporcionalidad directa

Dos variables son directamente proporcionales si la razón entre estas dos se mantiene constante

$$\frac{y}{x} = k$$

¡Veamos un ejemplo!

X	Y	$\frac{y}{x}$
2	3	$\frac{3}{2}$
4	6	$\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Notemos que la razón entre x e y se mantiene constante, por lo que son directamente proporcionales.

Proporcionalidad inversa

Dos variables son inversamente proprorcionales si el producto entre estas se mantiene constante.

$$xy = k$$

x	y	xy
1	10	$1 \cdot 10 = 10$
2	5	$2 \cdot 5 = 10$

Notemos que el producto entre x e y se mantiene constante, por lo tanto son inversamente proporcionales.

Propiedades de las potencias

Propiedad	Ejemplo
$a^0 = 1$, a distinto de 0.	$2^0 = 1$
$a^1 = a$	$2^1 = 2$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$
$a^n \div a^m = a^{n-m}$	$2^3 \div 2^2 = 2^{3-2} = 2^1 = 2$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{4}\right)^2 = \frac{2^2}{4^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ ó $\left(\frac{2}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}$
$(ab)^n = a^n b^n$	$(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$
$(a^n)^m = a^{nm}$	$(2^4)^2 = 2^{4\cdot 2} = 2^8 = 256$
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$,con a distinto de 0.	$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2^1}{3^1} = \frac{2}{3}$
$0^n = 0$, n distinto de 0.	$0^2 = 0$

Propiedades de las raíces

Propiedad	Ejemplo
$\sqrt[n]{1} = 1$	$\sqrt[5]{1} = 1$
$\sqrt[n]{0} = 0$	$\sqrt[3]{0} = 0$
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$
$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[15]{2}$

Clase de raíces prueba de transición

Propiedades de los logaritmos

Propiedad	Ejemplo
$\log_b 1 = 0$	$\log_2 1 = 0$
$\log_b b = 1$	$\log_3 3 = 1$
$\log_b(m \cdot n) = \log_b m + \log_b n$	$\log(5 \cdot 4) = \log 5 + \log 4$
$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$	$\log_5 \frac{4}{3} = \log_5 4 - \log_5 3$
$\log_b(m^n) = n \log_b m$	$\log_2(5^6) = 6 \log_2 5$
$\log_b(\sqrt[n]{m}) = \frac{1}{n} \log_b m$	$\log_2(\sqrt[3]{3}) = \frac{1}{3} \log_2 3$
$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ Con 'c' la base que tu quieras	$\log_5 7 = \frac{\log_3 7}{\log_3 5}$
$m^{\log_b n} = n^{\log_b m}$	$5^{\log_5 10} = 10^{\log_5 5} = 10^1 = 10$

Clase de logaritmos prueba de transición

Números complejos

Sea $z = a + bi$, donde $\mathbf{a}$ es la parte real y $\mathbf{b}$ es la parte imaginaria, e i es la unidad imaginaria la cual es igual a $\sqrt{-1}$.

$$\text{Módulo de } z: \ |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{Conjudado de } z: \ \bar{z} = a - bi$$

Potencias de la unidad imaginaria.

$i^0 = 1 \ i^1 = i \ \ i^2 = -1 \ \ i^3 = -i \ \ i^4 = 1$

Para cualquier otro exponente podemos dividir el exponente por 4, y el resto de la división será el nuevo exponente de la unidad imaginaria.

¡Veamos un ejemplo!

$i^{89} = i^{88} \cdot i^1 = (i^4)^{22} \cdot i^1 = (1)^{22} \cdot i^1 = 1 \cdot i^1 = i^{\mathbf{1}} = i$, notemos que al realizar la división:

$$\begin{array}{r} 89 \\ \underline{-88} \\ \mathbf{1} \end{array} \div 4 \ = 22$$ nos da resto 1 el cual será el nuevo exponente de

la unidad imaginaria.

Cuando tenemos una unidad imaginaria en el denominador, multiplicamos tanto el numerador como el denominador por el conjugado de e complejo que está en el denominador.

¡Veamos un ejemplo!

$$\frac{2}{2-i} = \frac{2}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{4+2i}{2^2 - i^2} = \frac{4+2i}{4-(-1)} = \frac{4+2i}{5}$$

Para todo complejo $z = a + bi$, al que multiplicarlo con su conjugado, el resultado será $\mathbf{a^2} + \mathbf{b^2}$

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 \cdot i^2 = a^2 - b^2 \cdot (-1) = \mathbf{a^2} + \mathbf{b^2}$$

RESUMEN PRUEBA TRANSICIÓN

Eje temático: álgebra y funciones

Productos notables

Cuadrado de binomio	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
Suma por diferencia	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
Cubo de binomio	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
Suma o diferencia de cubos	$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
Producto de binomios con término en común	$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

Ecuación lineal

Tiene la forma $ax + b = 0$. Con a y b números reales.

Valores de a y b	Solución
$a \neq 0$	Tiene una solución y es $x = -\frac{b}{a}$
$a = 0$ y $b = 0$	Infinitas soluciones
$a = 0$ y $b \neq 0$	No tiene solución

Sea sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{ax + by = c}$$
$$\mathbf{dx + ey = f}$$

1) Tiene única solución si:

$$\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$$

2) No tiene solución si:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$$

3) Tiene infinitas soluciones si:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

Veamos el siguiente sistema...

$$\mathbf{2x + y = 5}$$
$$\mathbf{3x + 2y = 8}$$

Lo resolveremos con 3 métodos...

Método de sustitución

Paso 1: Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.

Paso 2: Se remplaza la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con una sola incógnita.

Paso 3: El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones y se despeja la otra incógnita.

¡Resolvamos!

$$(1)\quad 2x + y = 5$$
$$(2)\ 3x + 2y = 8$$

Paso 1: despejamos y de la ecuación (1)

$$\mathbf{y = 5 - 2x}$$
$$3x + 2y = 8$$

Paso 2: Remplazamos en la ecuación (2)

$$3x + 2y = 8$$
$$3x + 2(\mathbf{5 - 2x}) = 8$$
$$3x + 10 - 4x = 8$$
$$-x + 10 = 8$$
$$x = 2$$

Paso 3: Remplazamos x en alguna ecuación, digamos la (1)

$$2x + y = 5$$
$$2 \cdot 2 + y = 5$$
$$y = 1$$

Por lo tanto, nuestra solución es $x = 2$ e $y = 1$

Método de igualación

Paso 1: Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.

Paso 2: Se igualan las ecuaciones y despejamos la incógnita.

Paso 3: Se remplaza el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones y se despeja la otra incógnita.

¡Resolvamos!

$$(1) \quad 2x + y = 5$$
$$(2) \; 3x + 2y = 8$$

Paso 1: despejemos y en ambas ecuaciones

$$(1) \quad y = 5 - 2x$$
$$(2) \; y = \frac{8 - 3x}{2}$$

Paso 2: igualamos y resolvemos

$$\frac{8 - 3x}{2} = 5 - 2x$$
$$x = 2$$

Paso 3: Remplazamos x en alguna ecuación, digamos la (1)

$$2x + y = 5$$
$$2 \cdot 2 + y = 5$$
$$y = 1$$

Por lo tanto, nuestra solución es $x = 2$ e $y = 1$

Método de reducción

Paso 1: Se multiplica una de las ecuaciones con el fin de que uno de los números que acompañe a la incógnita sea el inverso aditivo del número que acompañe en la otra ecuación en la misma incógnita

Paso 2: Luego se suman las ecuaciones de manera que quede una sola incógnita.

Paso 3: Se obtiene el valor de la incóginita y luego se remplaza en cualquiera de las dos ecuaciones inciales para despejar la otra incógnita.

$$(1) \quad 2x + y = 5$$
$$(2)\ 3x + 2y = 8$$

Paso 1: seleccionamos la incognita que queremos “eliminar”, en este caso elegimos y. Luego multiplicamos la ecuación (1) por -2, con el fin de que el valor que acompañe y sea el inverso aditivo del valor que acompaña a y en la otra ecuaciación.

$$(1) \quad 2x + y = 5 \,/\cdot -2$$
$$(2)\ 3x + 2y = 8$$

$$(1) \quad -4x - 2y = -10$$
$$(2)\ 3x + 2y = 8$$

Paso 2: sumamos las ecuaciones y nos queda una sola incógnita.

$$-4x - 2y + 3x + 2y = -10 + 8$$
$$-x = -2$$
$$x = 2$$

Paso 3: remplazamos en alguna ecuación, digamos la (1).

$$2x + y = 5$$
$$2 \cdot 2 + y = 5$$
$$y = 1$$

Por lo tanto, nuestra solución es $x = 2$ e $y = 1$.

Propiedades de las desigualdades

1) Si se le suma o resta un número el sentido no cambia.

$$4 < 5$$
$$4 < 5 \;/+1$$
$$5 < 6$$

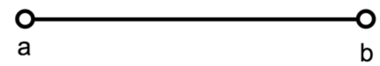
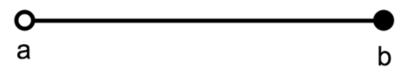
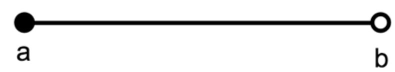
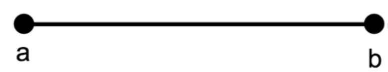
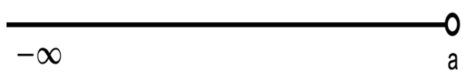
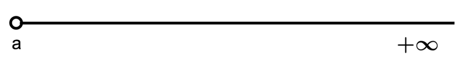
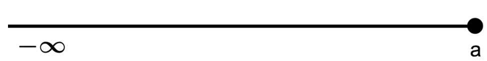
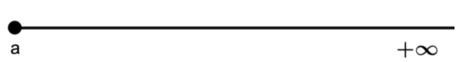
2) Si se le multiplica o divide por un número positivo el sentido no cambia

$$4 < 5$$
$$4 < 5 \;/\cdot 2$$
$$8 < 10$$

3) Si se le multiplica o divide por un número negativo el sentido **sí** cambia.

$$4 < 5$$
$$4 < 5 \;/\cdot -2$$
$$-8 > -10$$

Intervalos

INTERVALO	GRÁFICAMENTE	SIGNIFICADO	SE LEE
Abierto		$a < x < b$ $x \in]a,b[$	x es mayor a a y menor que b
Abierto por la izquierda		$a < x \leq b$ $x \in]a,b]$	x es mayor a a y menor o igual que b
Abierto por la derecha		$a \leq x < b$ $x \in [a,b[$	x es mayor o igual a a y menor que b
Cerrado		$a \leq x \leq b$ $x \in [a,b]$	x es mayor o igual a a y menor o igual que b
Infinito por la izquierda y abierto		$x < a$ $x \in]-\infty, a[$	x es menor a a
Infinito por la derecha y abierto		$x > a$ $x \in]a, +\infty[$	x es mayor a a
Infinito por la izquierda y cerrado		$x \leq a$ $x \in]-\infty, a]$	x es menor o igual a a
Infinito por la derecha y cerrado		$x \geq a$ $x \in [a, +\infty[$	x es mayor o igual a a

Ecuación cuadrática

Tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$

Para determinar sus soluciones podemos utilizar la fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si x_1 y x_2 son las ecuaciones de una ecuación cuadrática, siempre se cumple que:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Discriminante (Δ)

$$\Delta = \mathbf{b^2 - 4ac}$$

Valor	Significado
$\Delta > \mathbf{0}$	Tiene dos soluciones reales y distintas
$\Delta = \mathbf{0}$	Tiene dos soluciones reales e iguales
$\Delta < \mathbf{0}$	Tiene dos soluciones complejas y conjugadas

Funciones

Una función f relaciona a un conjunto de partida A (dominio) y a un conjunto de llegada, B (codominio), esta función le asigna a cada elemento del conjunto de partida A, un único (o ningún) elemento del conjunto de llegada B.

$$f: A \rightarrow B$$

Sea x una variable independiente y $f(x)$ una variable dependiente del valor que tome x.

¡Veamos unos ejemplos para calcular el valor de una función!

Sea f una función con dominio en los números reales. Si $f(x) = x + 1$, determine los valores de $f(0)$ y $f(3)$.

$$f(0) = 0 + 1 = 1$$
$$f(3) = 3 + 1 = 4$$

x	$f(x) = y$
Preimagen	Imagen
Variable dependiente	Variable independiente

Dominio, codominio y recorrido

Básicamente el dominio son los valores que puede tomar la variable independiente x, el codominio es todo el conjunto de llegada y el recorrido es un subconjunto del codominio, este queda definido por los valores que puede tomar la variable dependiente f(x).

¡Veamos unos ejemplos para que veamos como son cada uno!

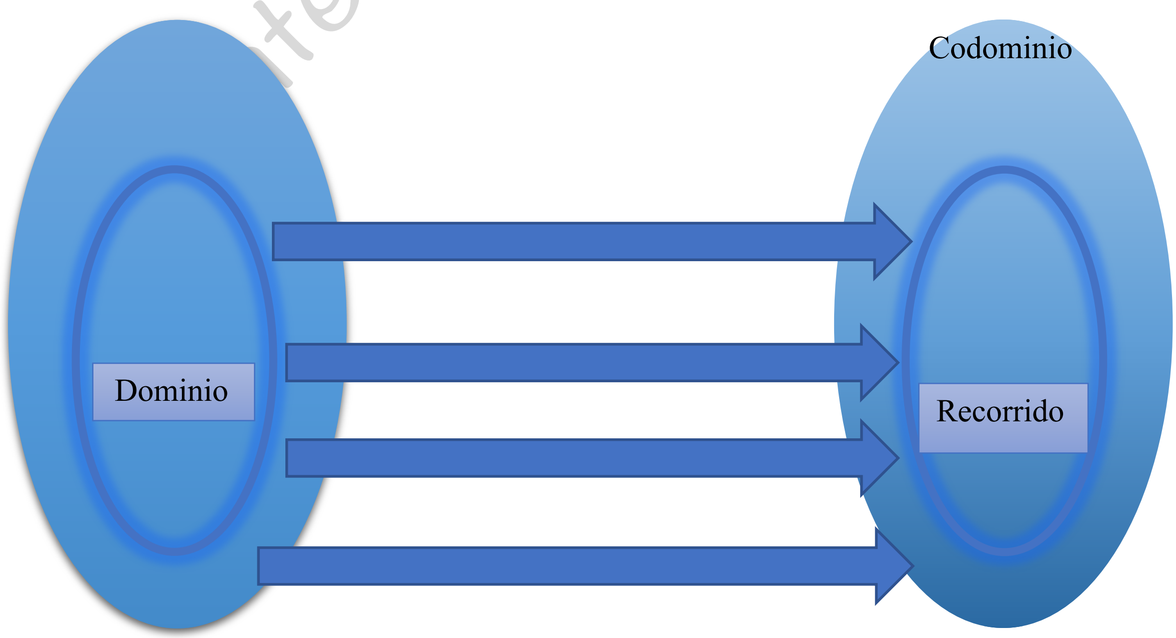
1) Sea f una función definida en $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $f(x) = 2x + 5$, ¿cuál es el dominio, el codominio y el recorrido?

El dominio, está dado por el conjunto de partida $\mathbb{R}$, mientras que el condominio está dado por el conjunto de llegada $\mathbb{R}$. Finalmente, para calcular el recorrido podemos despejar la variable x, y vemos si existe algún valor que f(x) no pueda tomar.

Sea $y = f(x) = 2x + 5$.

$$y = 2x + 5$$
$$\frac{y-5}{2} = x$$

Como y puede tomar cualquier valor, diremos que su recorrido son los números reales, es decir, $\mathbb{R}$.
En conclusión: dominio: $\mathbb{R}$, condominio: $\mathbb{R}$ y recorrido: $\mathbb{R}$.



2) Sea f una función definida en $[-2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Si $f(x) = \sqrt{x+2}$, ¿cuál es el dominio, el codominio y el recorrido?

Solución:

El dominio, está dado por el conjunto de partida $[-2, +\infty[$ esto ocurre, porque en una raíz cuadrada la cantidad subradical debe ser mayor o igual a cero, por lo que se debe cumplir que:

$$x + 2 \geq 0$$
$$x \geq 2$$

Es decir, que $x \in [-2, +\infty[$ (x pertenece al intervalo $[-2, +\infty[$)

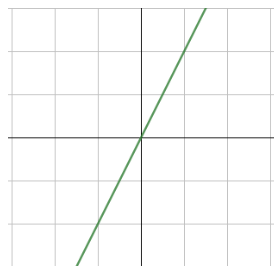
Mientras que el condominio está dado por el conjunto de llegada $\mathbb{R}$. Finalmente, para calcular el recorrido podemos observar que, al ser una raíz cuadrada, está siempre tendrá como resultado un número mayor o igual a cero, por lo que el recorrido son los números mayores o iguales a cero.

En conclusión, dominio: $[-2, +\infty[$, condominio: $\mathbb{R}$ y recorrido: $[0, +\infty[$.

Pd: la función raíz cuadrada ya no entra, pero el ejemplo era para explicar los conceptos.

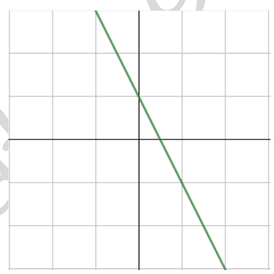
Función lineal

Tiene la forma $f(x) = mx$, con m número real distinto de cero. Si m es postivo la recta es creciente y si es negativo es decreciente



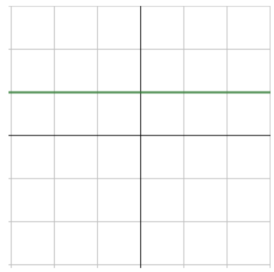
Función afín

Tiene la forma $f(x) = mx + n$, con m y n reales distintos de cero.
Notemos que al graficar esta función corta en el eje X en el punto $\left(-\frac{n}{m}; 0\right)$ y en el eje Y en el punto $(0, n)$.



Función constante

Tiene la forma $f(x) = m$, con m número real. Esta función tiene una como grafica una recta paralela al eje X, esto se debe a que todas las preimágenes tienen asociadas la misma imagen.



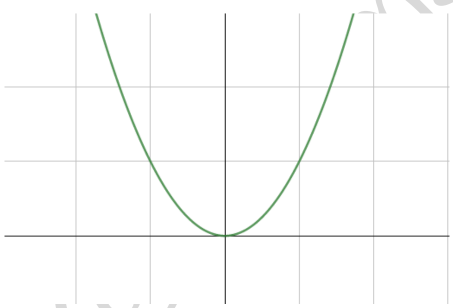
Función cuadrática

Tiene la forma forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$

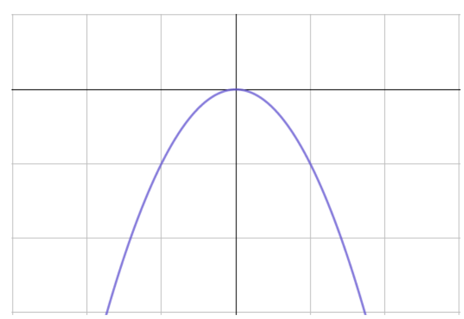
Si:

$a > 0$ La parábola estará de esta forma ∪

$a < 0$ La parábola estará de esta forma ∩



a > 0



a < 0

Para determinar sus intersecciones con el eje X debemos igualar la función a cero y resolver la ecuación cuadrática que nos queda. La función corta al eje Y en $(0, c)$

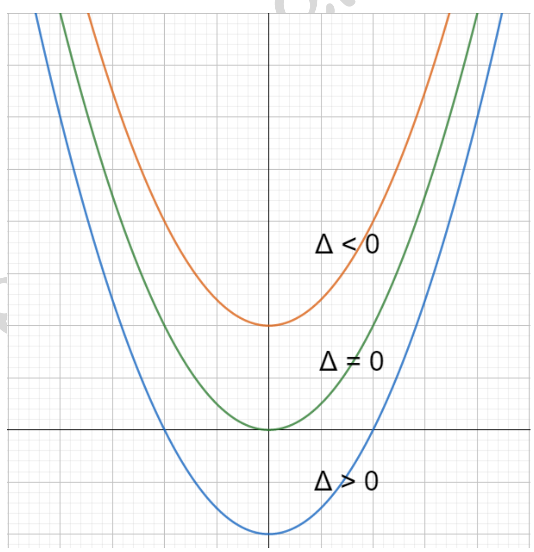
Recordemos el discriminante, $\Delta = b^2 - 4ac$, dependiendo del valor del discriminante, nosotros sabremos la cantidad de veces que corta al eje X la función.

Tenemos 3 casos:

1) Si $\Delta > 0$, corta en el eje X en dos puntos.

2)Si $\Delta < 0$, no corta el eje X.

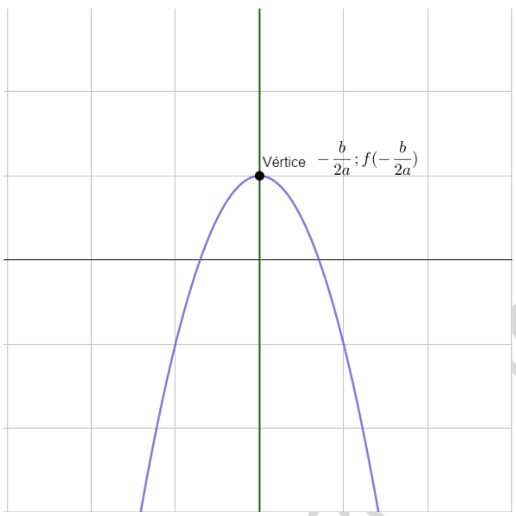
3) Si $\Delta = 0$, corta al eje X en un solo punto.

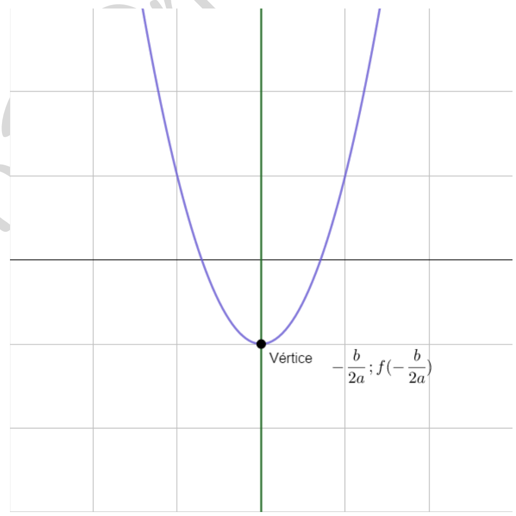


Vértice

$$\left(-\frac{b}{2a};f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

En este punto ocurren dos cosas interesantes. La primera es que pasa el eje de simetría $x=-\frac{b}{2a}$ encargado de cortar la parábola y dividirla en dos partes iguales y la segunda es que $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ corresponde al mínimo o máximo valor que alcanza la función, si $a>0$ será un mínimo y si $a<0$ será un máximo.





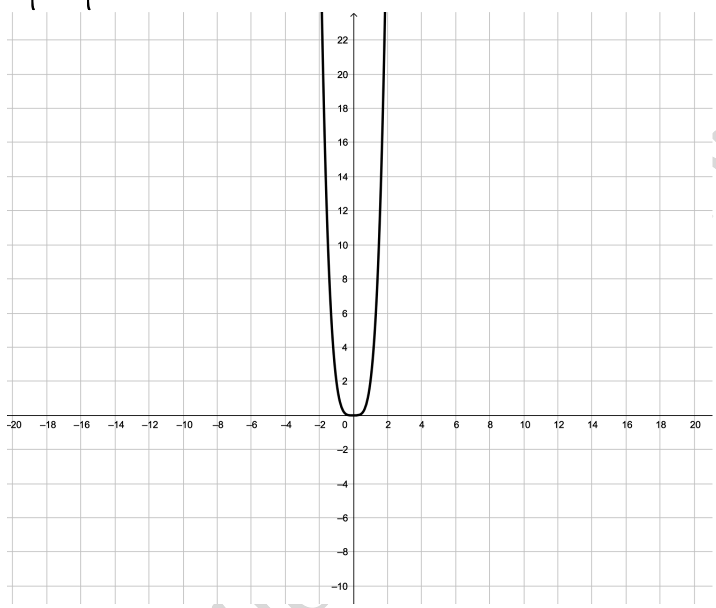
¿Cómo graficar una función cuadrática paso a paso?

Función potencia

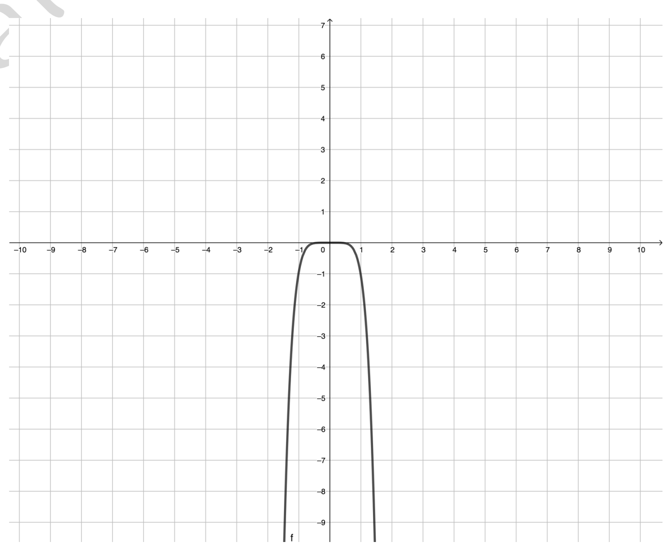
Tiene la forma $f(x) = ax^{n}$ con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $n \in \mathbb{Z}$.

¡Veamos unos ejemplos de sus gráficas!

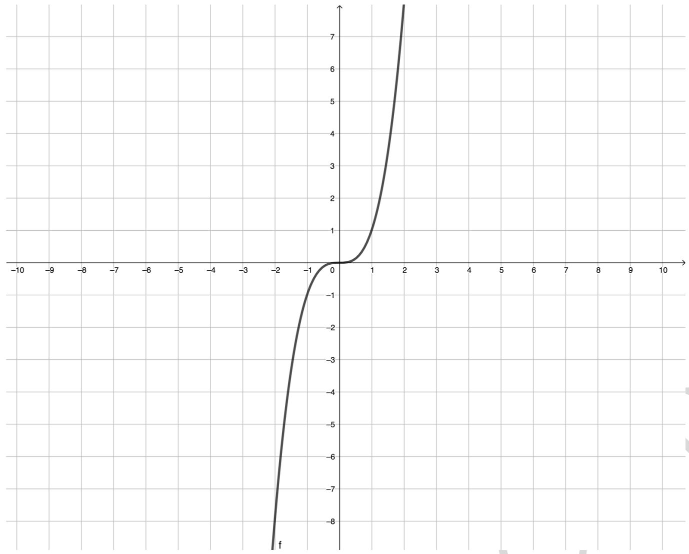
1) Si $a > 0$ y n es par positivo



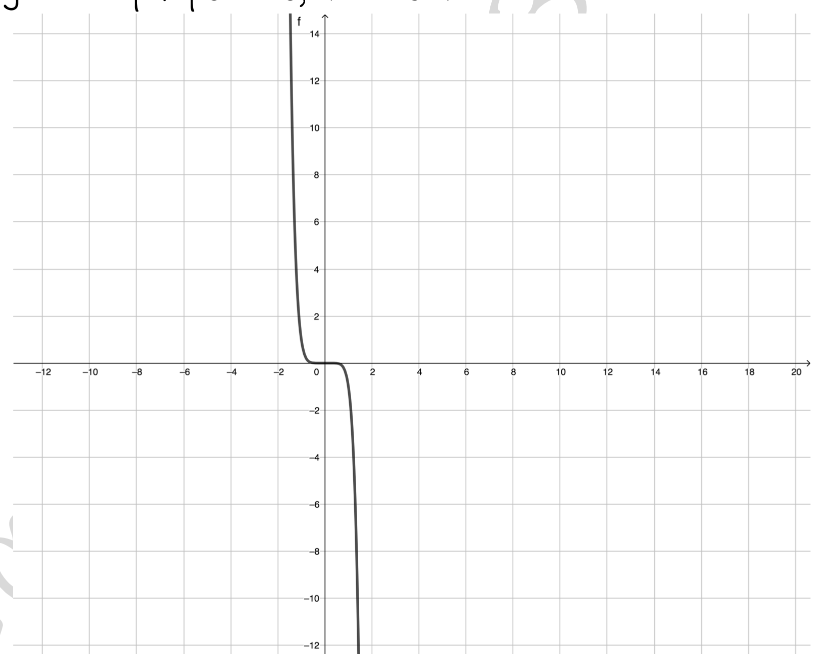
2) Si $a < 0$ y n es par positivo



3) Si $a > 0$ y n es impar positivo, distinto de 1



4) Si $a < 0$ y n es impar positivo, distinto de 1



¿Qué sucede cuando n es negativo?

Disponible (29/3)

Función inyectiva

Una función es inyectiva si a cada imagen le corresponde sólo una preimagen.
Algebraicamente una función f es inyectiva si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
Si tenemos la gráfica, se cumple que todas las rectas paralelas al eje X, **cortan en un solo punto.**

¡Veamos un ejemplo!

Sea f una función con dominio en los números reales. Si $f(x) = 3x + 2$, determine si es inyectiva o no.

$$
\begin{aligned}
f(x_1) &= f(x_2) \\
3x_1 + 2 &= 3x_2 + 2 \\
3x_1 &= 3x_2 \\
x_1 &= x_2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, f es inyectiva.

Función sobreyectiva

Una función es sobreyectiva si a cada imagen le corresponde una preimagen, es decir, toda imagen debe tener su preimagen. Puede ocurrir que una imagen tenga más de una preimagen. **En otras palabras, codominio debe ser igual recorrido.**

¡Veamos un ejemplo!

Sea f definida en $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $f(x) = x^2 + 2$, determine si es sobreyectiva, para ello calcularemos el recorrido.

$$y = f(x) = x^2 + 2$$
$$y = x^2 + 2$$
$$y - 2 + x^2 = 0$$

Notemos que podemos formar una suma por su diferencia:
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Con $a = \sqrt{y-2}$ y $b = x$, ya que $\left(\sqrt{y-2}\right)^2 - x^2 = y - 2 - x^2 = 0$

$$\left(\sqrt{y-2} + 2\right)\left(\sqrt{y-2} - x\right) = 0$$
$$\sqrt{y-2} + x = 0 \text{ ó } \sqrt{y-2} - x = 0$$
$$x = \sqrt{y-2} \text{ ó } x = -\sqrt{y-2}$$

Notemos que para ambas ecuaciones y solo puede tomar valores mayores o iguales a 2, ya que una raíz cuadrada no puede tener cantidad subradical negativa. Por lo que, al no tomar valores negativos, el recorrido difiere del codominio, por lo que la función no es sobreyectiva.

Función biyectiva

Es inyectiva y sobreyectiva a la vez, es decir, a cada elemento del recorrido le corresponde una preimagen distinta.

Función inversa $(\mathbf{f^{-1}})$

Para que una función posea inversa esta debe ser biyectiva. Para obtener la función inversa debemos despejar la "x".

¡Veamos un ejemplo!

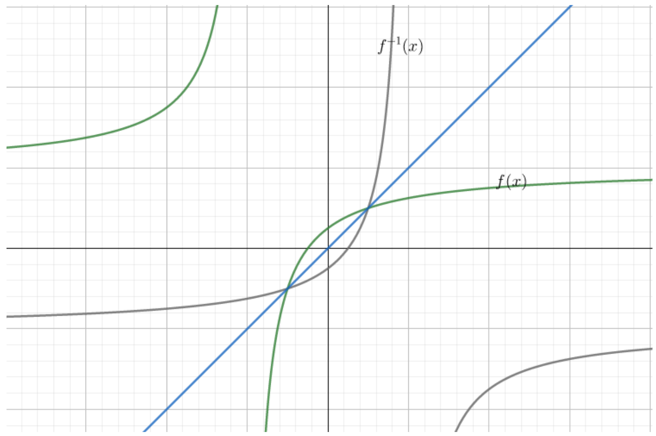
Sea g una función tal que $\mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{-2\}$ y f(x) = $\frac{2x-1}{2-x}$, ¿cuál es su función inversa?

Solución: Notemos que es una función biyectiva (puedes corroborarlo con los métodos anteriormente mencionados)

Para hallar la función inversa debemos despejar x.

$$\text{Sea } y = \frac{2x-1}{2-x}$$
$$y(2 - x) = 2x - 1$$
$$2y - xy = 2x - 1$$
$$2y + 1 = 2x + xy$$
$$2y + 1 = x(2 + y)$$
$$\frac{2y + 1}{2 + y} = x$$

Finalmente, expresamos la función inversa como $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{2+x}$



Traslación de funciones

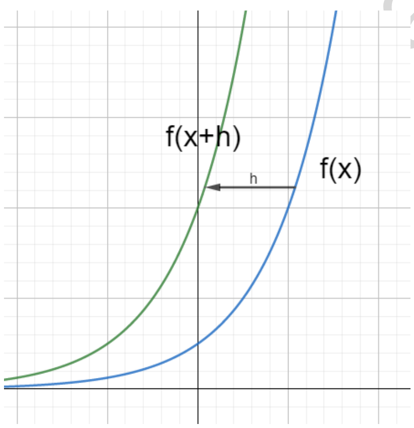
Sea la función f y h un número positivo.

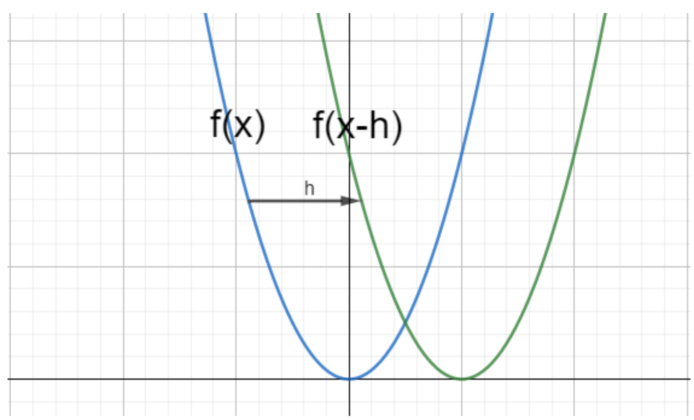
$f(x + h): \leftarrow$; $f(x)$se traslada h unidades hacia la izquierda.

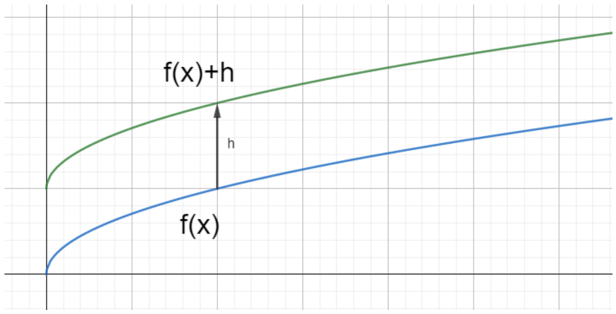
$f(x - h): \rightarrow$; $f(x)$se traslada h unidades hacia la derecha.

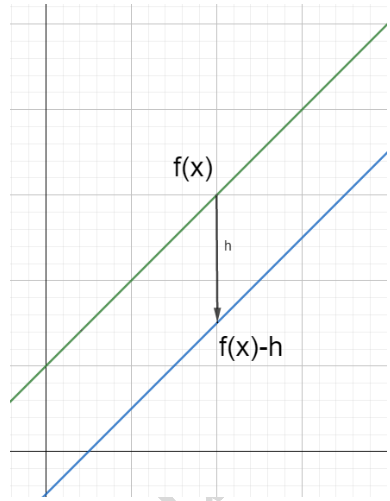
$f(x) + h: \uparrow$; $f(x)$se traslada h unidades hacia arriba.

$f(x) - h: \downarrow$; $f(x)$ se traslada h unidades hacia abajo.





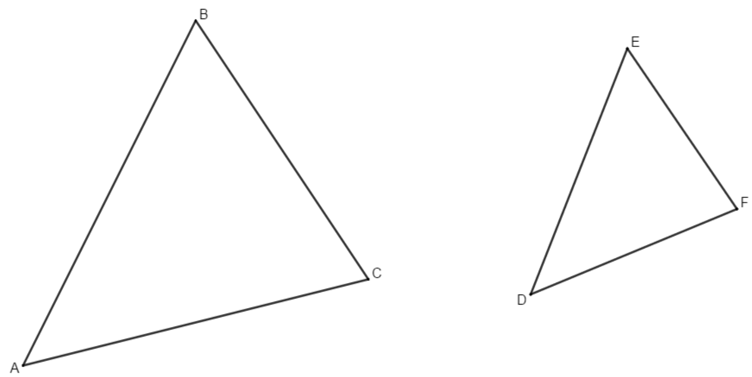

f(x)+h
h
f(x)


f(x)
h
f(x)-h

RESUMEN PRUEBA TRANSICIÓN

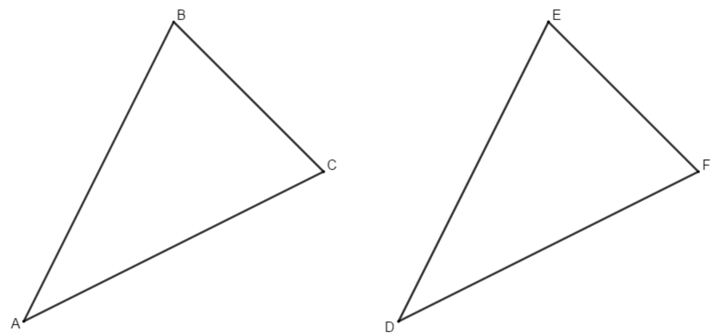
Eje temático: geometría

Criterios de semejanza



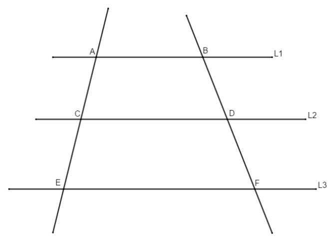
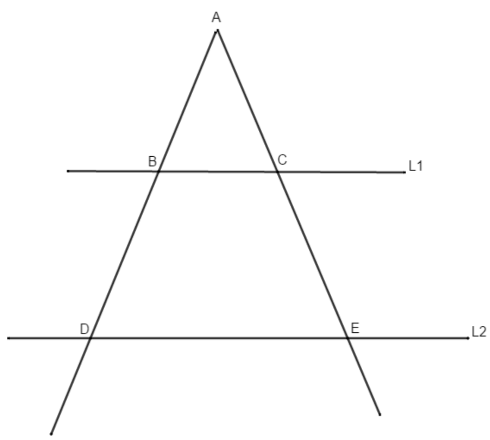
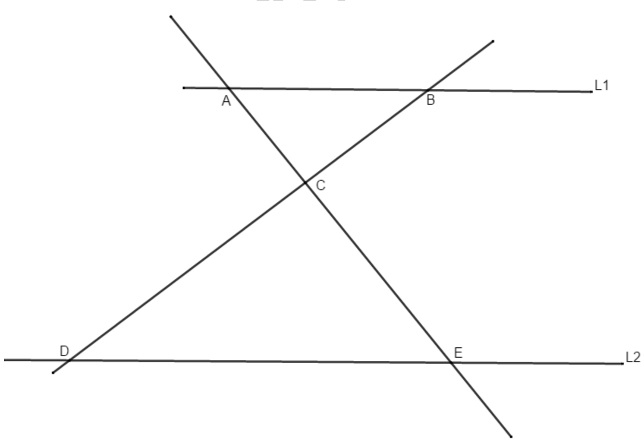
Criterio	Descripción	Ejemplo
AA	Dos triángulos tienen dos de sus ángulos congruentes entre sí	$\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$ $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle EDF$
LLL	Dos triángulos tienen todos sus lados en la misma proporción	$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$
LAL	Dos triángulos tienen dos lados en la misma proporción y el ángulo entre ellos es congruente	$\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$

Criterios de congruencia

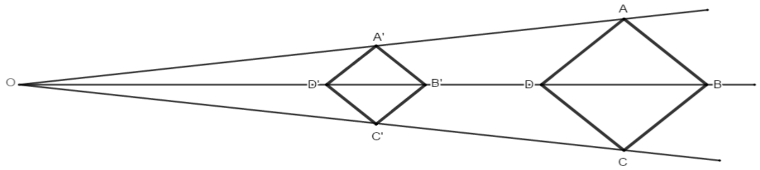


Criterio	Descripción	Ejemplo
LLL	Dos triángulos tienen todos sus lados correspondientes de la misma	$AB = DE$ $BC = EF$ $CA = FD$
LAL	Dos triángulos tienen dos lados correspondientes iguales y el ángulo entre ellos es el mismo.	$AB = DE$ $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$ $BC = EF$
ALA	Dos triángulos tienen dos ángulos congruentes y el lado entre ellos es tiene la misma medida	$\sphericalangle CBA \cong \sphericalangle FED$ $AB = DE$ $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle EDF$

Teorema de Thales

Figura	Condición	Proporción
	L1 // L2 // L3	$\frac{AC}{BD} = \frac{CE}{DF}$
	L1 // L2	$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$ $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$ $\frac{AC}{BC} = \frac{AE}{DE}$
	$L1 \ // \ L2$	$\frac{AC}{CE} = \frac{BC}{CD}$ $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{DC}$ $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{CE}$

Homotecia

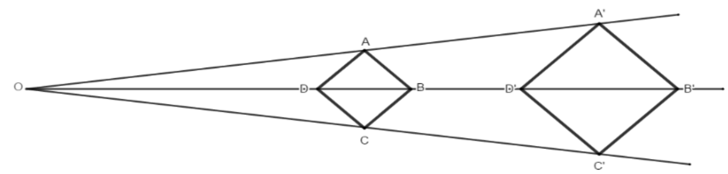


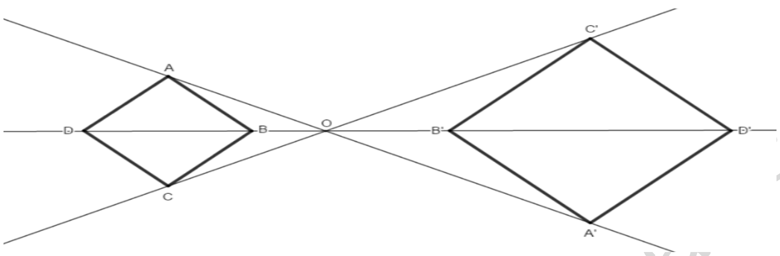
Homotecia de la figura ABCD con centro en O y razón k $(0 < k < 1)$

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{0B} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD} = k$$

Homotecia de la figura ABCD con centro en O y razón k $(k > 1)$

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{0B} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD} = k$$



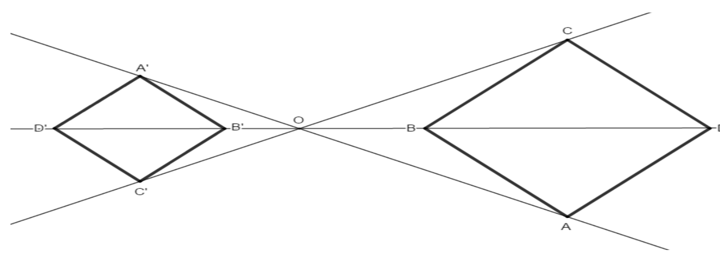


Homotecia de la figura ABCD con centro en O y razón k $(k < -1)$

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{0B} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD} = |k|$$

Homotecia de la figura ABCD con centro en O y razón k $(-1 < k < 0)$

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{0B} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD} = |k|$$



Isometrías de puntos

Rotaciones del punto (x, y) respecto al origen.

Grados	Horario	Antihorario
90°	$(y, -x)$	$(-y, x)$
180°	$(-x, -y)$	$(-x, -y)$
270°	$(-y, x)$	$(y, -x)$
360°	(x, y)	(x, y)

Rotaciones del punto (x, y) respecto al punto (a, b)

Grados	Horario	Antihorario
90°	$(y + a - b, a + b - x)$	$(a + b - y, x + b - a)$
180°	$(2a - x, 2b - y)$	$(2a - x, 2b - y)$
270°	$(a + b - y, x + b - a)$	$(y + a - b, a + b - x)$
360°	(x, y)	(x, y)

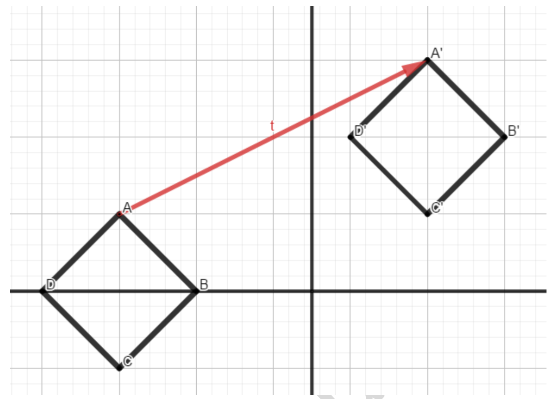
Traslación de un punto mediante vector.

Punto	Vector traslación	Punto trasladado
(x, y)	(a, b)	$(x + a, y + b)$

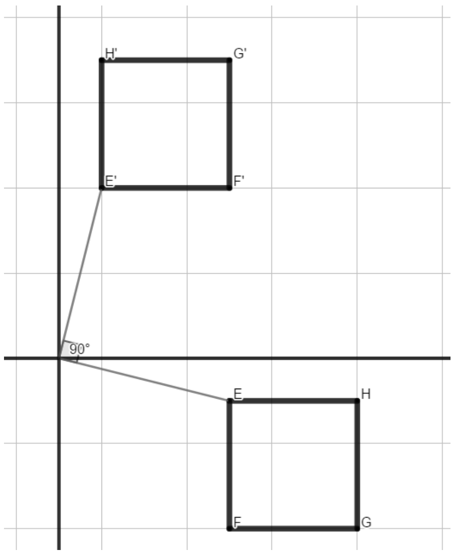
Simetrías del punto (x, y)

Simetría	Punto simétrico
Respecto al origen	$(-x, -y)$
Respecto al eje X	$(x, -y)$
Respecto al eje Y	$(-x, y)$

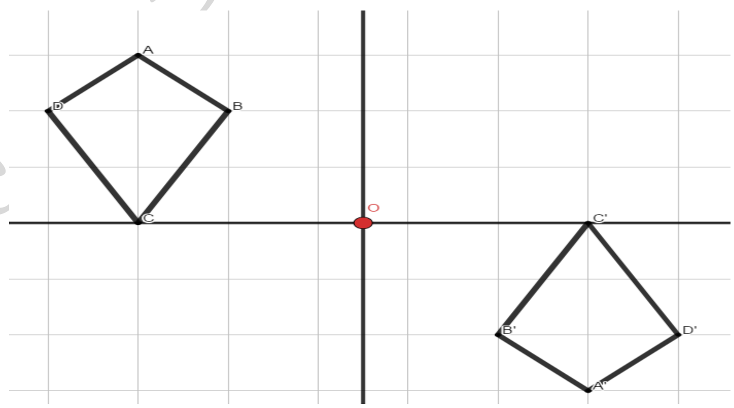
Isometría de figuras planas



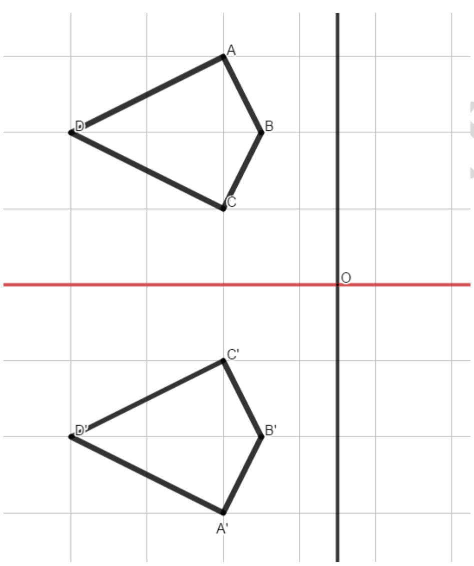
Traslación mediante vector



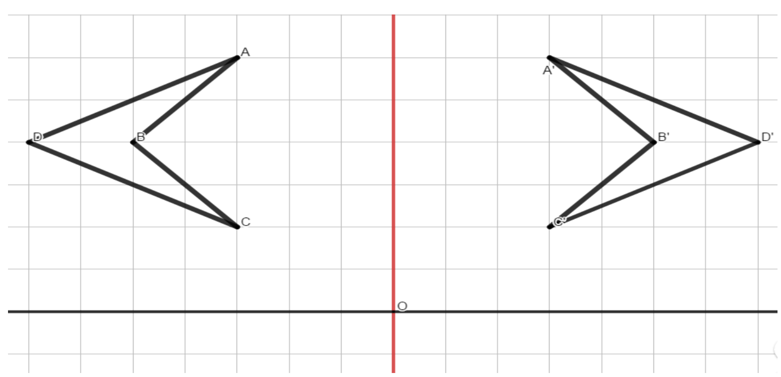
Rotación respecto al origen



Simetría respecto al origen

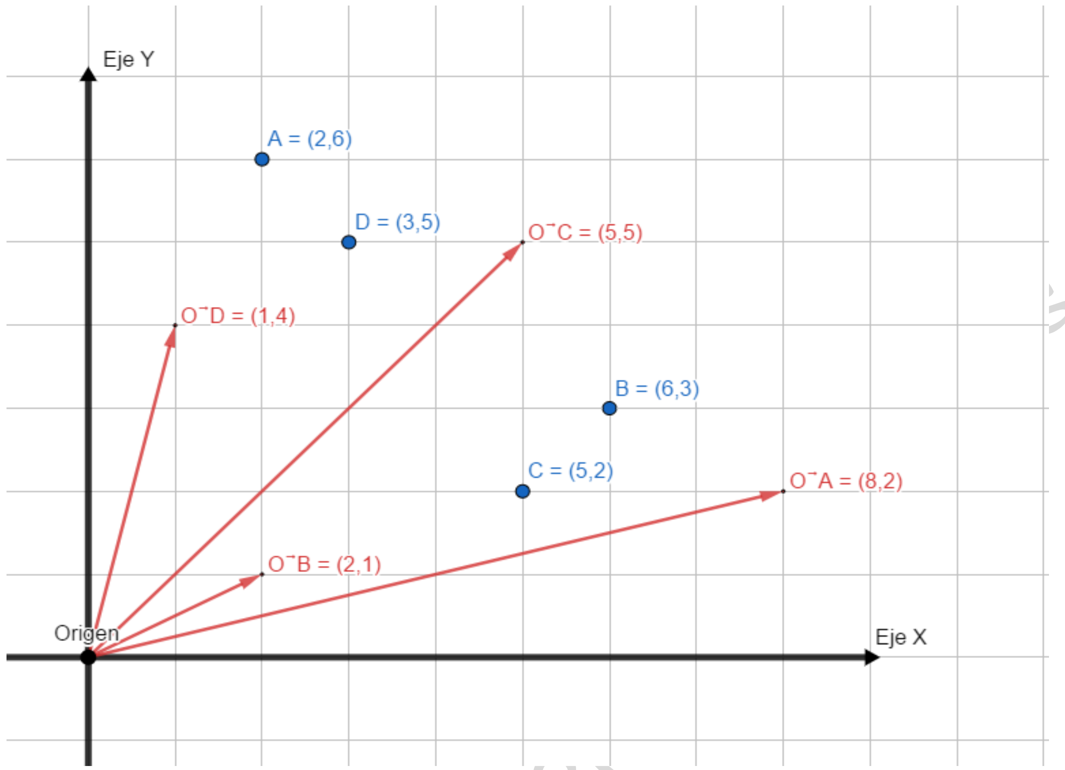


Simetría respecto al eje X



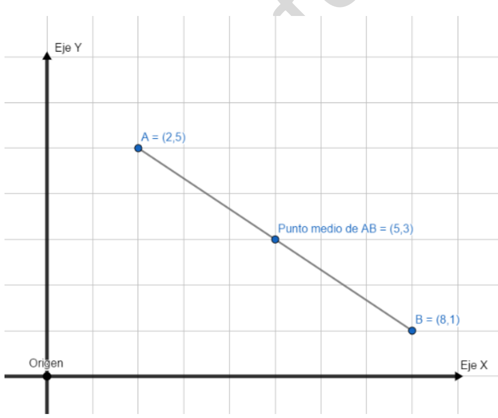
Simetría respecto al eje Y

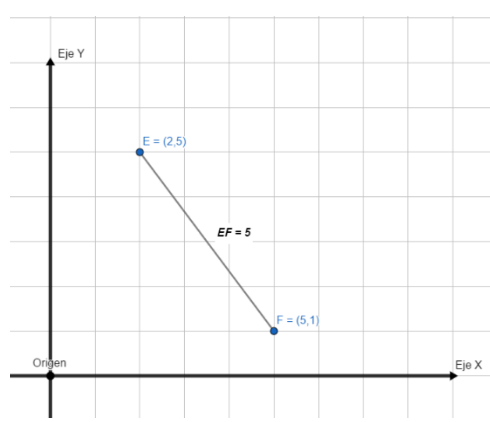
Plano cartesiano



Puntos en el plano

Operación	Punto 1	Punto 2	Fórmula
Punto medio	$(x_1; y_1)$	$(x_2; y_2)$	$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_{1+y_2}}{2}\right)$
Distancia	$(x_1; y_1)$	$(x_2; y_2)$	$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$





Vectores en el plano

Operación	Vector 1	Vector 2	Fórmula
Suma	$\vec{A}(a_1; b_1)$	$\vec{B}(a_2; b_2)$	$\vec{A} + \vec{B} = (a_1 + a_2; b_1 + b_2)$
Resta	$\vec{A}(a_1; b_1)$	$\vec{B}(a_2; b_2)$	$\vec{A} - \vec{B} = (a_1 - a_2; b_1 - b_2)$
Producto punto	$\vec{A}(a_1; b_1)$	$\vec{B}(a_2; b_2)$	$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2$

Propiedad	Vector	Fórmula
Producto por escalar t	$\vec{A}(a_1; b_1)$	$\vec{A} \cdot t = (a_1 \cdot t; b_1 \cdot t)$
Norma de un vector	$\vec{A}(a_1; b_1)$	$\lvert\lvert\vec{A}\rvert\rvert = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

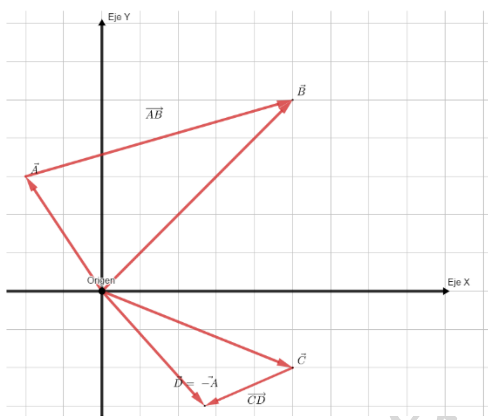
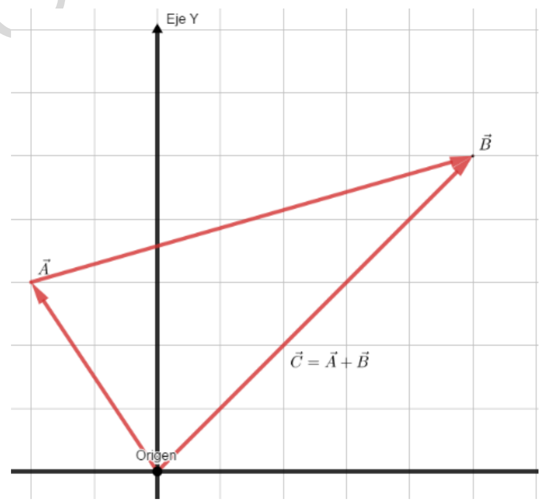
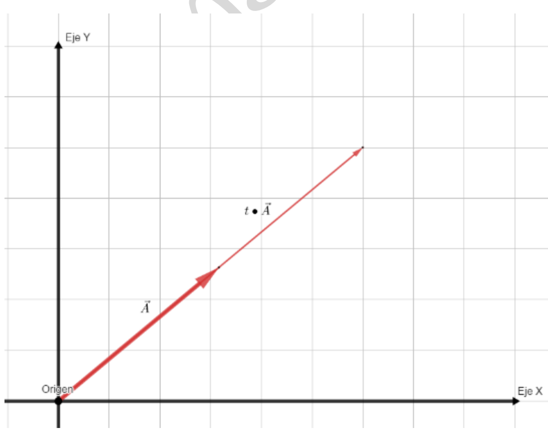


Gráfico de vectores

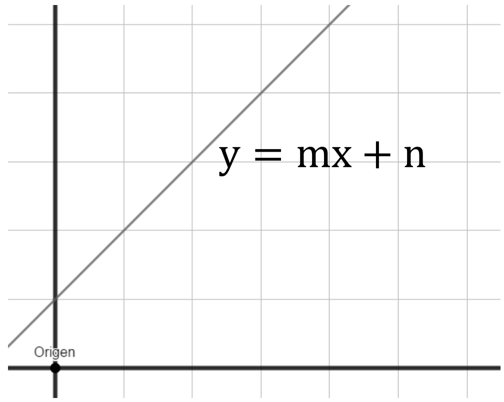


Suma de vectores



Ponderación de un vector

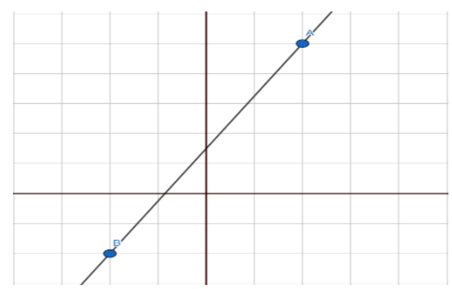
Ecuación de la recta



Ecuación de la recta dado dos puntos

Ecuación de la recta dado dos puntos

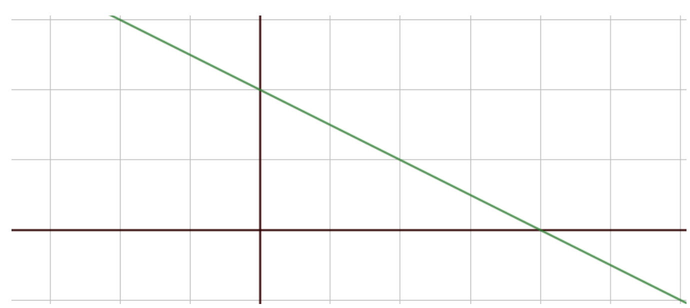
La recta que pasa por los puntos $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$ viene dada por la recta
$y = (x - x_1) \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + y_1$, donde $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ representa la pendiente de la recta



Ecuación de la recta dado un punto y pendiente

La recta que pasa por el punto $(x_1; y_1)$ y tiene m de pendiente, viene dada por la recta

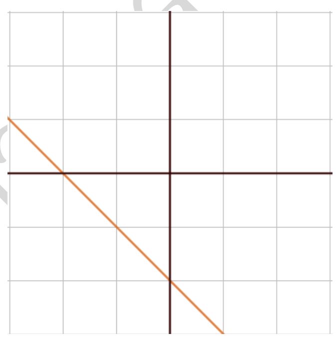
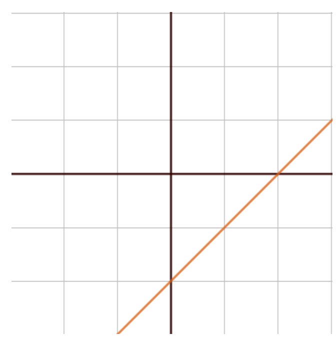
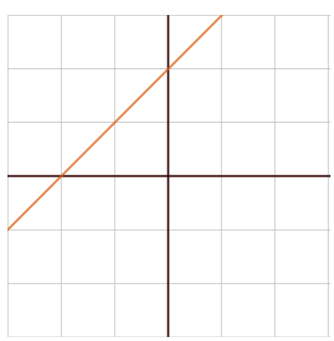
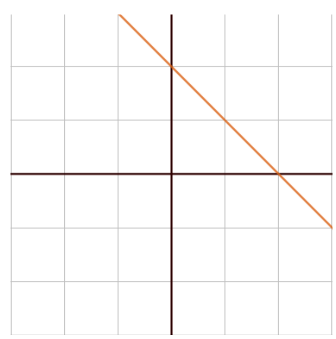
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



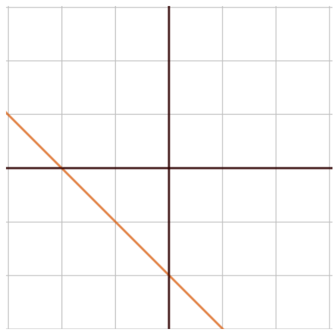
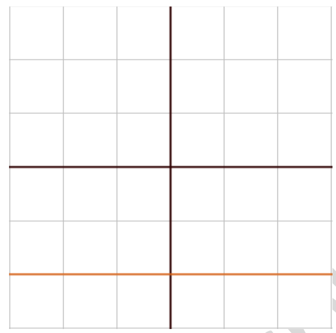
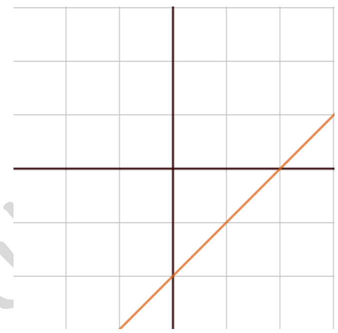
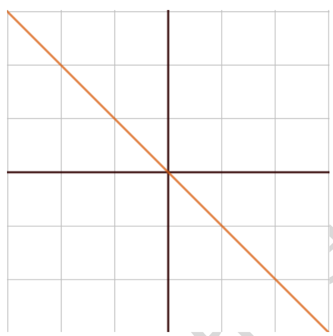
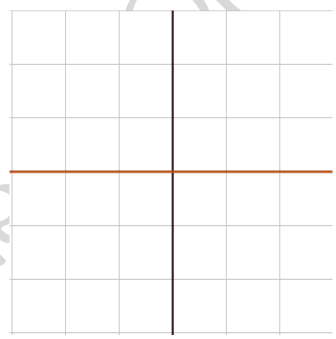
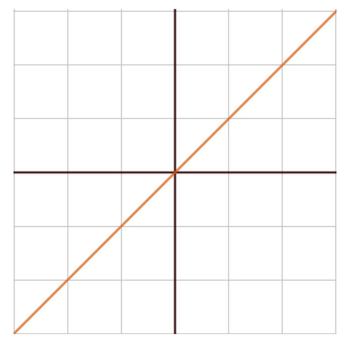
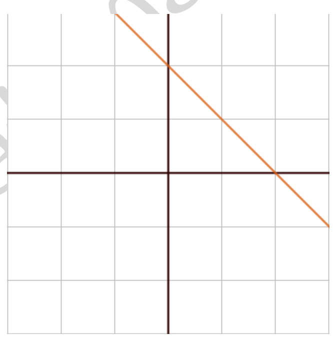
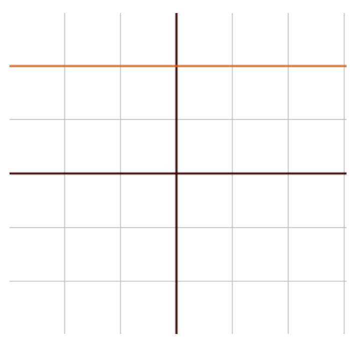
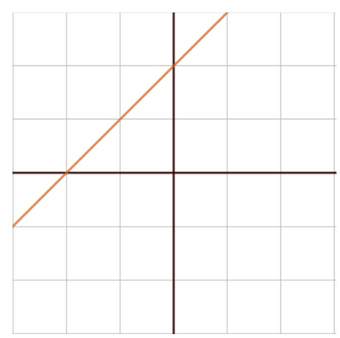
Tipos de ecuaciones de la recta

Forma	Ecuación	Pendiente	Coef. posición
General	$Ax + By + C =$	$-\frac{A}{B}$	$-\frac{C}{B}$
Principal	$y = mx + n$	m	n
Segmento	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	$-\frac{b}{a}$	b

Gráfico de ecuación de segmento

	$a < 0$	$a > 0$
$b < 0$		
$b > 0$		

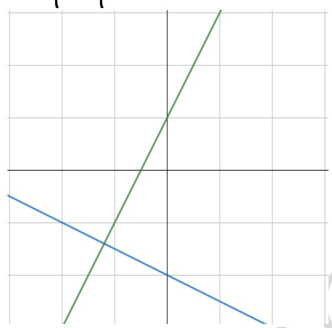
Gráficos de ecuaciones de las rectas en forma principal

	$m < 0$	$m = 0$	$m > 0$
$n < 0$			
$n = 0$			
$n > 0$			

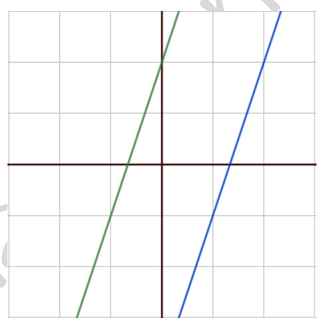
Análisis de pares de rectas

Sea $L_1: y = m_1 \cdot x + n_1$ y $L_2: y = m_2 \cdot x + n_2$ dos rectas, donde m_1 y m_2 son las pendientes y n_1 y n_2 los coeficientes de posición

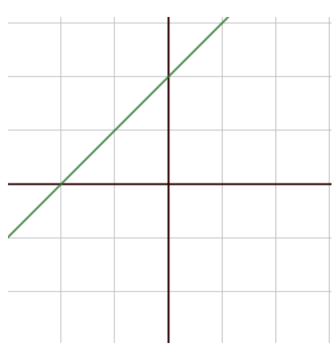
Estas rectas son perpendiculares si $m_1 \cdot m_2 = -1$



Estas rectas son paralelas no coincidentes si $m_1 = m_2$ y $n_1 \neq n_2$



Estas rectas son paralelas coincidentes si $m_1 = m_2$ y $n_1 = n_2$



RESUMEN PRUEBA TRANSICIÓN

Eje temático: Probabilidad y estadística

Medidas de tendencia central

Sea un conjunto de n datos numéricos.

Media aritmética o promedio

Es el cociente entre la suma de todos los datos y el número total de datos.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Mediana

Es el valor que se ubica en la posición central de los datos cuando están ordenados de **menor a mayor.**

Caso 1: La cantidad de datos es impar. La mediana se ubica en la **posición:**

$$Me = \frac{n + 1}{2}$$

Donde n es la cantidad de datos.

Por ejemplo, si tenemos los datos $\{5,6,7\}$.

La cantidad de datos de datos es 3, que es impar, por lo que la mediana estará ubicada en la **posición:**

$$Me = \frac{3 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Dato de la segunda posición: 6

Caso 2: La cantidad de datos es par. La mediana es el **promedio** de los dos valores centrales.

Posición del primer dato central: $\frac{n}{2}$

Posición del segundo dato central: $\frac{n+2}{2}$

Por ejemplo, si tenemos los datos {10,12,14,16}.

La cantidad de datos es 4, que es par, por lo que la mediana va a ser el promedio de los dos valores centrales.

Posición del primer dato central: $\frac{4}{2} = 2$

Posición del segundo dato central: $\frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Dato de la segunda posición: 12

Dato de la tercera posición: 14

Luego calculamos el promedio, y este será la mediana.

$$\frac{12+14}{2} = \frac{26}{2} = 13$$

Moda

Dato que más se repite. Si tenemos que dos datos tienen la misma frecuencia y son de mayor frecuencia que el resto decimos que el conjunto de datos es bimodal, si son tres será trimodal, etc. Si no hay moda el conjunto es amodal.

Rango

Diferencia entre el dato mayor y el dato menor.

Medidas de dispersión

La **varianza** (σ^2) nos indica qué tan dispersos están los datos en relación con la media. La varianza de una variable aleatoria discreta X se puede calcular como:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot \text{frecuencia } x_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot \text{frecuencia } x_2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2 \cdot \text{frecuencia } x_n}{\text{Número total de datos}}$$

La **desviación estándar** (σ) es la raíz cuadrada de la varianza.

¿Cómo calcular la desviación estándar?

Medidas de posición

Medida de posición	Definición
Cuartil	El cuartil Q_k, con $k = 1,2,3$ de un conjunto de n datos, ordenados de menor a mayor, corresponde al valor en el cual, aproximadamente, el $25k\%$ de los valores son menores o iguales a él.
Percentil	El percentil P_k con $k = 1,2,3,\ldots,99$ de un conjunto de n datos, ordenados de menor a mayor, corresponde al valor en el cual, aproximadamente, el $k\%$ de los valores son menores o iguales a él.

Notemos que:

$$25k\% = \frac{25}{100} \cdot k = \frac{1}{4} \cdot k = \frac{k}{4}$$

$$k\% = \frac{1}{100} \cdot k = \frac{k}{100}$$

Te enseñamos como realizar paso a paso un diagrama de caja :)

(Disponible desde el 24/3)

¡Veamos unos ejemplos!

Sean los datos del conjunto $\{2,3,3,5,7,7,8,8,8,10\}$. Calcule:

1) El primer cuartil 2) El percentil 60

Solución: Notemos que tenemos 10 datos en total y están ordenados de menor a mayor.

1) El primer cuartil está en la posición $25\% \cdot 10 = \frac{10}{4} = 4$.

Dato de la cuarta posición: 5

2) El percentil 60 está en la posición $60\% \cdot 10 = \frac{60}{100} \cdot 10 = 6$

Dato de la sexta posición: 7

Principio aditivo

Tenemos un evento A que se puede realizar de "m" formas y un evento B que se puede realizar de "n" formas y a la vez sólo podemos realizar A o B, entonces tengo $\mathrm{m}+\mathrm{n}$ formas de escoger.

¡Veamos un ejemplo!

Si tengo solo 6 poleras h&m y 5 poleras zara. ¿Cuántas opciones de ponerme una polera solamente tengo para hoy?

Solución:

A: usar una polera h&m (6 opciones)

B: usar una polera zar (5 opciones)

$$6+5=11$$

Y tiene mucho sentido, porque tenemos 11 poleras en total :)

Principio multiplicativo

Tenemos un evento A que se puede realizar de "m" formas y un evento B que se puede realizar de "n" formas. Si elegimos un elemento cualquiera de A y luego otro de B, entonces tenemos $\mathrm{m}\cdot\mathrm{n}$ formas de hacerlo.

¡Veamos un ejemplo!

Si en el negocio "el jugito" hay tres tamaños de vaso 2 litros, de 5 litros y 10 litros (sí los vasos son gigantes) y solo tiene 2 sabores: Frutilla y Naranja. ¿de cuántas formas puedo hacer mi elección al comprr un jugo?

Solución:

A: Tamaño del jugo (3 opciones)

B: Sabor del jugo (2 opciones)

$$3\cdot 2=6$$

Fijate en las combinaciones posibles:

2L-Frutilla, 2L-Naranja, 5L-Frutilla, 5L-Naranja, 10L-Frutilla y 10L-Naranja

En total 6 opciones para tomarnos el súper jugo ☺

Probabilidad clásica

Si en un experimento aleatorio, todos los resultados tienen la misma probabilidad de ocurrir, entonces la probabilidad de que ocurra un suceso, llamémoslo A, es la división entre el número de casos favorables y los casos totales.

$$P(A) = \frac{\#\text{Casos favorables}}{\#\text{Casos totales}}$$

¡Veamos un ejemplo!

Se lanza un dado común, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número par?

Solución:

Paso 1: definimos el evento.

A: Que salga par.

Paso 2: vemos los cuáles son los casos de los favorables y totales. (y cuál es su cantidad).

Casos totales: $\{1,2,3,4,5,6\}$ son 6.

Casos favorables: $\{2,4,6\}$ son 3.

Paso 3: Calcular la probabilidad que nos piden.

Entonces la probabilidad de que salga par es:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Propiedades de las probabilidades

Sean los eventos A y B.

- $P(A \cup B)$ es la probabilidad de que ocurra A o B
- $P(A \cap B)$ es la probabilidad de que ocurra A y B
- $P(A/B)$ es la probabilidad de que ocurra A dado que ocurrió el evento B.

Unión de eventos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Intersección de eventos:

1) Si son independientes (la ocurrencia de uno no afecta a la ocurrencia del otro):

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

2) Si son dependientes (la ocurrencia o no de uno afecta a la ocurrencia del otro)

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

O viceversa:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(A/B)$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Lo que es la probabilidad condicionada.

Número de muestras posibles de tamaño k de una población de n elementos

Para calcular el número de muestras que podemos formar, nos podemos guiar por el siguiente mapa mental.

- **¿Se considera a todos los elementos?**
  - Sí, por lo tanto es permutación, por lo que nos debemos preguntar: En las muestras, ¿puede haber elementos que se repiten entre sí?
    - Sí, por lo tanto es una permutación con repetición. $\frac{n!}{Q_1!\cdot Q_2!\cdot\ \dots\ \cdot Q_n!}$ Donde Q es la cantidad de veces que se repite cada elemento.
    - No, por lo tanto es una permutación simple. $n!$
  - No, por lo tanto puede ser variación o combinatoria, por lo que nos debemos preguntar: ¿importa el orden en que se ordenen las muestras?
    - Sí, por lo tanto es una varación, por lo que nos debemos preguntar: En las muestras, ¿puede haber ...
      - Sí, por lo tanto es una variación con repetición. n^k
      - No, por lo tanto es una variación sin repetición. $\frac{n!}{(n-k)!}$
    - No, por lo tanto es una combinatoria, por lo que nos debemos preguntar: En las muestras, ¿puede haber elementos que se repiten entre sí?
      - Sí, por lo tanto es una combinatoria con repetición. $\binom{n+k-1}{k}=\frac{(n+k-1!}{k!\cdot(n-1)!}$
      - No, por lo tanto es una combinatoria sin repetición. $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ \dots\ \cdot 3\cdot 2\cdot 1$

Por ejemplo $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$

Clase técnicas de conteo

¿Qué es una variable aleatoria?

Es una función que le **asigna un valor** al resultado de un experimento aleatorio.

Se utilizan letras mayúsculas para definir variables (por ejemplo X) y letras minúsculas para definir los valores que puede tomar esa variable (por ejemplo x). El recorrido de la variablae son los valores que puede tomar x.

¡Veamos un ejemplo!

Se define la variable aleatoria X como número obtenido al lanzar un dado común, ¿cuál son los valores posibles de X?

Respuesta: Al lanzar un dado común se puede obtener 1, 2, 3, 4, 5 o 6.
Por lo que el recorrido de X es $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Variables aleatorias discretas

Son variables que solo pueden tomar valores finitos.

¡Veamos unos ejemplos!

Número de caras obtenidas al lanzar 3 veces una moneda, número de hijos, número de mascotas en el hogar, etc.

Función de probabilidad de una variable aleatoria discreta

Relaciona cada valor que puede tomar una variable con su **probabilidad** de ocurrencia.

¡Veamos un ejemplo!

Sea X una variable aleatoria discreta, se define X como el resultado que se obtiene al lanzar un dado común. ¿Cuál es la función de probabilidad de X?

Solución:

Al lanzar un dado común se puede obtener 1, 2, 3, 4, 5 o 6, cada uno tiene la misma probabilidad de ocurrencia (equiprobables) la cual es $\frac{1}{6}$

Entonces su función de probabilidad estará dada por:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = 2 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = 3 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = 4 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = 5 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = 6 \end{cases}$$

Notemos que la **suma de todas las probabilidades debe ser siempre 1.**

Función de probabilidad acumulada

Esta función acumula las sumas de las probabilidades que hay hasta cierto valor. Se denota como $P(X \leq x)$.

¡Veamos un ejemplo!

Usando la variable anterior calculemos $P(X \leq 3), P(X \leq 5)$ y $P(X \leq 6)$

$$P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 5) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 3) + P(X = 5) \\ = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 6) = \\ P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 3) + P(X = 5) + P(X = 6) \\ = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} \\ = 1 \end{aligned}$$

Clase función de probabilidad

¡Veamos un ejercicio que siempre preguntan!

Sea X una variable aleatoria discreta, tal que su función de probabilidad está dada por:

$$P(X = x) = \begin{cases} kx & \text{si } x = 1 \\ kx^2 & \text{si } x = 2 \\ k & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Con k un numero real, entonces $P(X = 2)$=

Solución:

Nos piden , para obtenerla tenemos que conocer el valor de k, para ello debemos recordad que la suma de las probabilidades siempre debe ser 1.

$$P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$$

$$k \cdot 1 + k \cdot 2^2 + k = 1$$

$$k + 4k + k = 1$$

$$6k = 1$$

$$k = \frac{1}{6}$$

Finalmente:

$$P(X = 2) = \frac{1}{6} \cdot 2^2 = \frac{4}{6}$$

Valor esperado o esperanza de una variable aleatoria discreta

$$E(X) = \mu = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots + x_n \cdot p_n$$

Con x valor de la variable y p probabilidad de ocurrencia de x

Varianza de una variable aleatoria discreta

$$V(X) = E(x^2) - E^2(x)$$

Desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

Distribución binomial

Sea una variable aleatoria X tal que $X \sim B(n, p)$, entonces la probabilidad que ocurran exactamente $\mathbf{x}$ éxitos en los $\mathbf{n}$ experimentos estará dada por la función:

$$\mathbf{P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^{x} \cdot (1 - p)^{n-x}}$$

¿Cuándo usarla?

Cuando se cumplan las siguientes condiciones (todas).

1) Se realiza un experimiento n veces, el cual tiene 2 resultados posibles. Uno "éxito" y otro de "fracaso".

2) La probabilidad de éxito es constante e igual a p, mientras que la de fracaso será $1 - p$

3) Los experimentos son independientes entre sí.

Valor esperado o esperanza

$$E(X) = np$$

Varianza

$$V(X) = np(1 - p)$$

Desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{np(1 - p)}$$

Clase distribución binomial

Variables aleatorias continua

Una **variable aleatoria** es **continua** si su conjunto de posibles valores es todo un intervalo (finito o infinito) de números reales. Por ejemplo, el tiempo que demoran en llegar 10 corredores a una meta, la estatura de jóvenes de 18 años que están suscritos a nuestro canal de YouTube, etc.

Distribución normal

Sea X una variable aleatoria continua. Tal que $\mathrm{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, donde μ es la media y σ^2 es la varianza.

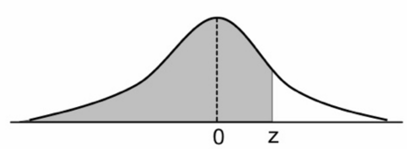
Poder calcular probabilidades tranquilamente, simplemente estandarizamos a una variable aleatoria continua Z tal que $\mathrm{Z} \sim \mathrm{N}(0,1)$, donde:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Ahora veamos la tabla que nos daban en la PSU...

10. En esta prueba, para una variable aleatoria continua Z, tal que Z ~ N(0, 1) y donde la parte sombreada de la figura representa a P(Z ≤ z), se usará la siguiente tabla:

z	P(Z ≤ z)
0,67	0,749
0,99	0,839
1,00	0,841
1,15	0,875
1,28	0,900
1,64	0,950
1,96	0,975
2,00	0,977
2,17	0,985
2,32	0,990
2,58	0,995



¡Veamos un ejemplo de cómo utilizarla paso a paso!

Sea X una variable aleatoria continua. Tal que $X \sim N(3, 2^2)$, entonces $P(X \leq 5) =$

Solución:

Paso 1: identificamos la media μ y la desviación estándar σ

$$\mu = 3$$
$$\sigma = 2$$

Paso 2: estandarizamos a una variable aleatoria continua Z tal que $Z \sim N(0,1)$, donde:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 3}{2}$$

Paso 3: calculamos la probabilidad, pero antes jugamos un poco con la desigualdad para estandarizar.

$$P(X \leq 5) =$$

1) Restamos la media

$$P(X - 3 \leq 5 - 3)$$

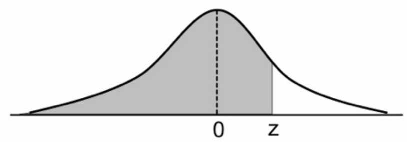
2) Dividimos por la desviación estándar

$$= P\left(\frac{X - 3}{2} \leq \frac{5 - 3}{2}\right)$$
$$= P(Z \leq 1)$$

3) Buscamos el 1 en la tablita :) y vemos la probabilidad de $P(Z \leq 1)$.

10. En esta prueba, para una variable aleatoria continua Z, tal que Z ~ N(0, 1) y donde la parte sombreada de la figura representa a P(Z ≤ z), se usará la siguiente tabla:

z	$P(Z \leq z)$
0,67	0,749
0,99	0,839
1,00	0,841
1,15	0,875
1,28	0,900
1,64	0,950
1,96	0,975
2,00	0,977
2,17	0,985
2,32	0,990
2,58	0,995



Por lo tanto $P(Z \leq 1) = 0{,}841$ y listo 😄

Algunas propiedades importantes de la distribución normal...

$$P(Z \leq z) = P(Z < z)$$
$$P(Z < -z) = P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z)$$
$$P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq a) - P(Z \leq b)$$

Aproximación de distribución binomial a normal

Sea X una variable aleatoria, tal que $X \sim B(n, p)$. Entonces X se puede aproximar a una distribución normal de $\mu = np$ y $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

Nota que μ es la esperanza o valor esperado de X y σ es la desviación estándar :)

Hagamos otro ejercicio de distribución normal juntos :)